PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

EXERCICE N° 1

Déterminer les triangles dont la somme des cosinus des angles est égale à $\frac{3}{2}$.

EXERCICE N° 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$$

et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points admettant ses solutions comme affixes.

EXERCICE N° 3 Déterminer l'ensemble des entiers $n \geqslant 0$ tels que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

EXERCICE N° 4

Déterminer l'ensemble des nombres réels α vérifiant les inégalités $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et tels qu'il existe trois vecteurs unitaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ d'un espace euclidien de dimension 3 formant deux à deux des angles de mesure 2α.

EXERCICE N° 5

Calculer la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

où n est un entier positif ou nul.

EXERCICE N° 6

Déterminer la nature et les coordonnées des foyers de la conique définie dans un repère orthonormé d'un plan euclidien par l'équation

$$481\,x^2 + 384\,xy + 369\,y^2 + 2118\,x - 324\,y - 2124 = 0.$$

(On cherchera d'abord une translation de la forme $x = X + u$ et $y = Y + v$ qui annule les termes du premier degré.)

EXERCICE N° 7

a) Soit dans un plan euclidien reporté à un repère orthonormé un ensemble de cercles respectivement définis par :

[*i*] C est centré en (0.1) et passe par (0.0);
[*ii*] C′ est tangent extérieurement à C, tangent à l'axe d'équation $(y = 0)$ et centré en A d'abscisse $a > 0$;
[*iii*] C″ est tangent extérieurement à C et C′, tangent à l'axe d'équation $(y = 0)$ et centré en B d'abscisse $b < a$.

Montrer qu'il existe une fonction φ d'expression très simple telle que $b = \varphi(a)$. Calculer les rayons de C′ et C″ en fonction de a (faire une figure explicative).

b) Etudier la suite définie par $a_0 = a$ et

$$a_{n+1} = \varphi(a_n).$$